数理解析研究所講究録
81 巻 1970 年 235-262

三値論理関数の完全性について

田中末雄・田原道夫（早稲田大学）

1. まえがき

3値論理回路を構成することは、理論・実際の両面に亘って従来から研究されているが、全般的に言って、その成果は不充分である。とくに、基本となる論理関数の完全性に関する研究が遅れているように思われる。本稿では、従来筆者らが行なってきたこの問題についての研究結果を述べることにする。

いくつかの論理演算素子を基本に選び、それを適当に合成すれば、任意の論理演算が可能になるとき、この基本演算素子は完全系をなす、とか完全（*functionally complete*）であるなどと言う。3値論理の完全性の問題は1939年のSlupecki[1]以来あまり進展は見られず、現状でも遅れていると言わざるを得ない。そのため、「現在自分が入手している論理素子だけで任意の論理演算が可能であろうか、又、不可能としたなら他にどんな素子があれば可能となろうか」という問題に対して、充分な解答を与えられない。

この点に鑑み、筆者らは3値論理の完全性に関する研究を

行ないた。その結果、一般的な問題については完全な解答こそ得られなかったが、従来より遥かに前進した結果を得ることができた。

ついで、この結果を利用して工学的に重要な２つの問題を研究した。オ１の問題として、２値のNANDやNORのようにそれ自体で完全系をなすPolypheckについての研究を行なった。更に、オ２の問題として、３値論理回路に今迄広く利用されてきたAND, ORを用いる構成方法についての研究を行なった。

以下に、これらについて具体的に述べる。

２．完全性に関する一般論

まえがきに述べたような問題を一般的に解決するためには、完全系をなすための関数集合の条件を検証し易い形で求めることが必要である。

２値論理における完全性の問題は、伊吹・苗村・野崎[2]によってほゞ完全に解かれている。しかし、３値論理においては、個々の例についてはともかく、一般的な研究は不充分である。そのうち、筆者らの知るかぎり、現在迄のところ、最も検証し易い形は次のようにSlupeckiによって与えられた。

[Slupeckiの定理] m(≧3)値論理関数の集合が完全系をなすための必要十分条件は、この関数集合から、(1)すべての1変数関数と、(2)少なくとも1つの非縮退2変数関数(定義2・2参照)が合成できること、である。

本稿で対象とするのは $m=3$ の場合であるが、この2条件のうち、2番目はともかくとして、最初の条件は非常に検証しにくい。何故なら、3値1変数関数は27個あり、そのすべてを合成できるかどうかを知るのは多くの場合、非常に困難だからである。それ故、この定理より更に検証し易い形を求める必要がある。本章では、これについて論じる。

2・1 論理関数の定義とその性質

[定義 2・1] 3値1変数関数はすでに述べたように、27個あり、これを表2-1のように u_i ($i=1,2,\cdots,27$) であらわす。真理値集合 $L\equiv\{0,1,2\}$ を考えると、これらは変数値,関数値に関する次の6つの置換によって表2-1の α〜η の7つの集合に類別することができる。即ち、1. 恒等置換, 2. 0と1の交換, 3. 1と2の交換, 4. 2と0の交換, 5. 3を法として1を加える, 6. 3を法として2を加える。

各集合は互いに素であるが、必ずしも6個の関数から成るとは限らない。たとえば、α に属するのは u_{16} と u_{20} の2つであり、u_{16} に対して上の1.,5.,6.の置換を施すとやはり

u_{16}が得られ、2.，3.，4. の置換を施すと u_{20} が得られる。u_{20}に対しても同様である。

	$u(x)$	x = 0	1	2	Modular展開形
α	u_{16}	1	2	0	$1 \oplus x$
	u_{20}	2	0	1	$2 \oplus x$
β	u_{10}	1	0	0	$1 \oplus 2x^2$
	u_{11}	1	0	1	$1 \oplus x \oplus x^2$
	u_{19}	2	0	0	$2 \oplus x^2$
	u_{26}	2	2	1	$2 \oplus 2x \oplus x^2$
	u_{17}	1	2	1	$1 \oplus 2x \oplus 2x^2$
	u_{25}	2	2	0	$2 \oplus x \oplus 2x^2$
γ	u_5	0	1	1	x^2
	u_4	0	1	0	$2x \oplus 2x^2$
	u_{15}	1	1	2	$1 \oplus x \oplus 2x^2$
	u_9	0	2	2	$2x^2$
	u_{24}	2	1	2	$2 \oplus x \oplus x^2$
	u_3	0	0	2	$2x \oplus x^2$
δ	u_7	0	2	0	$x \oplus x^2$
	u_{23}	2	1	1	$2 \oplus 2x^2$
	u_{21}	2	0	2	$2 \oplus 2x \oplus 2x^2$
	u_2	0	0	1	$x \oplus 2x^2$
	u_{13}	1	1	0	$1 \oplus 2x \oplus x^2$
	u_{18}	1	2	2	$1 \oplus x^2$
ε	u_{12}	1	0	2	$1 \oplus 2x$
	u_8	0	2	1	$2x$
	u_{22}	2	1	0	$2 \oplus 2x$
ζ	u_1	0	0	0	0
	u_{14}	1	1	1	1
	u_{27}	2	2	2	2
η	u_6	0	1	2	x

表2-1　1変数関数

集合αに属する関数をu_αであらわす。他の集合についても同様である。なお、u_αは一般に巡回関数（cyclic function）と呼ばれる。これは2値の否定関数の拡張されたものと考えられるが、実際、後に分かるように多くの点で2値否定関数と類似した性質を示す。

［定義2・2］　n変数関数があって、これがある（$n-l$）変数関数（たゞし、$n-1 \geqq l \geqq 1$）と等しい時、この関数は変数縮退関数であると言う。又、変数がいかなる真理値を取ってもその関数値がある真理値を取り得ないような関数を関数値縮退関数と呼ぶ。変数値も関数値も縮退していない関数を、単に非縮退関数と呼ぶ。

1変数関数を例にとると、$u_\alpha, u_\varepsilon, u_\eta$は非縮退関数であり、$u_\beta, u_\gamma, u_\delta$は関数値縮退関数，$u_\zeta$はどちらの形にも縮退している。

［定義2・3］　3値論理関数はmodular展開することができる。たとえば、2変数関数$f(x_1, x_2)$は、

$$f(x_1, x_2) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \alpha_3 x_1 x_2 \oplus \alpha_4 x_1^2 \oplus \alpha_5 x_2^2 \oplus \alpha_6 x_1^2 x_2 \oplus \alpha_7 x_1 x_2^2 \oplus \alpha_8 x_1^2 x_2^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot 1)$$

と展開され、1変数関数$u(x)$は、

$$u(x) = \beta_0 \oplus \beta_1 x \oplus \beta_2 x^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot 2)$$

と展開できる。こゝで、α_i, β_iは0，1，2のどれか。

n変数関数をこのように展開した時、次のように展開できたとすると、この関数 f を線形関数と呼ぶ。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \alpha_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad \cdots (2\cdot3)$$

たゞし、$\sum$ は $\oplus$ の意味の総和である。

1変数関数を modular 展開すると、表2-1のようになる。$u_\beta, u_\gamma, u_\delta$ が非線形関数で、他はすべて線形関数である。

〔補題2・1〕線形関数から合成される関数は線形である。

(証明) f および f_i が線形であるとする。即ち、

$$f = a_0 \oplus \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \qquad \cdots\cdots \qquad (2\cdot4)$$

$$f_i = b_{0i} \oplus \sum_{j=1}^{n} b_{ji} x_j \qquad \cdots\cdots \qquad (2\cdot5)$$

とする。g を f と f_i から合成する。

$$g = f(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

$$= (a_0 \oplus \sum_{j=1}^{n} a_j b_{0i}) \oplus (\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{ji}) \cdot x_j \qquad \cdots (2\cdot6)$$

即ち、g は線形である。(証終)

〔定義2・4〕u_α によって自己同型対応をなす関数，即ち，

$$u_\alpha\{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\} = f(u_\alpha(x_1), u_\alpha(x_2) \cdots, u_\alpha(x_n)) \cdots (2\cdot7)$$

なる f を自己巡回関数と呼ぶ。(2・7) 式で u_α はすべて同じものでなければならない。u_{16} によって自己同型対応をなす関数は u_{20} によっても自己同型対応をなす。

1変数関数のうち、自己巡回的なのは u_α と u_η である。2値の否定が u_α に対応すると考えれば、自己巡回関数は2値の自己双対関数に対応する。

2変数の自己巡回関数 f を(2・1)式のように展開したとすると、その係数間には次の関係が成立する。

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5,\quad \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0 \qquad \cdots\cdots (2\cdot 8)$$

〔補題2・2〕自己巡回関数から合成される関数は、すべて自己巡回的である。

(証明) f, f_i が n 変数の自己巡回関数であるとする。($i = 1, 2, \cdots, n$)。$f^* = f\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ と f^* を合成する。

$$\begin{aligned} u_\alpha(f^*) &= f\{u_\alpha(f_1), u_\alpha(f_2), \cdots, u_\alpha(f_n)\} \\ &= f\{f_1(u_\alpha(x_1), u_\alpha(x_2), \cdots, u_\alpha(x_n)), f_2(\cdots\cdots,\quad)\} \\ &= f^*\{u_\alpha(x_1), u_\alpha(x_2), \cdots, u_\alpha(x_n)\} \end{aligned}$$

f^* は自己巡回関数である。(証終)

2・2　3値関数の完全性に関する必要十分条件

〔補題2・3〕　2つの u_α のうち、一方から他方を合成できる。

(証明) $u_{16}(u_{16}(x)) = u_{20}(x)$, $u_{20}(u_{20}(x)) = u_{16}(x)$ (証終)

〔補題2・4〕 u_α と u_ε (u_ζ) が1つずつあれば、これから他のすべての u_ε (u_ζ) を合成できる。

(証明) u_{16} と u_ε を考えれば、$u_{16}(u_{22}) = u_8$, $u_{16}(u_8) = u_{12}$

$u_{16}(u_{12}) = u_{22}$ 。他も同様。（証終）

〔補題2・5〕 非自己巡回関数と u_α から、少なくとも1つの非自己巡回1変数関数を合成できる。

（証明）非自己巡回関数を f とする。f が1変数関数なら明らか。2変数関数とする。次のように、f と u_α から v_i を合成する。

$$v_1(x) = f(x, x) = d_0 \oplus (d_1 \oplus d_2 \oplus d_6 \oplus d_7)x \oplus (d_3 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus d_8)x^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot 9)$$

$$\begin{aligned} v_2(x) &= f(x, u_{16}(x)) = f(x, 1 \oplus x) \\ &= (d_0 \oplus d_2 \oplus d_5) \oplus (d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus 2d_5 \oplus d_6 \oplus 2d_7 \oplus 2d_8)x \\ &\quad \oplus (d_3 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus 2d_7 \oplus 2d_8)x^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(x) &= f(u_{16}(x), x) = f(1 \oplus x, x) \\ &= (d_0 \oplus d_1 \oplus d_4) \oplus (d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus 2d_4 \oplus 2d_6 \oplus d_7 \oplus 2d_8)x \\ &\quad \oplus (d_3 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus 2d_6 \oplus d_7 \oplus 2d_8)x^2 \quad \cdots\cdots (2\cdot 11) \end{aligned}$$

もしも、v_1, v_2, v_3 のいずれもが[redacted]自己巡回関数であるとする。即ち、u_α 又は u_η に等しい、即ち、x^2 の係数はすべて0であり、x の係数はすべて0か1とする。(2・9), (2・10), (2・11)の3式の係数にこの関係を入れて、連立方程式として解くと、(2・8)式の関係が出てくる。即ち、f は自己巡回関数である。これは仮定に反する。

f が3変数以上の場合も同様である。（証終）

〔補題2・6〕 非線形関数 f とすべての u_ξ（即ち、0, 1, 2）

から、少なくとも１つの非線形１変数関数を合成できる。

（証明）fが１変数関数なら明らか。２変数関数とする。fが(2·1)式のように展開できたとする。u_5を用いて、次のv_iを合成する。

$$v_4(x)=f(x,0),\ v_5(x)=f(0,x),\ v_6(x)=f(x,1),\ v_7(x)=f(1,x),\ v_8(x)=f(x,2),\ v_9(x)=f(2,x) \quad \cdots\cdots (2\cdot 12)$$

上のv_4～v_7，及び(2·9)式のv_1がすべて線形であったとする。(2·12)式を(2·9)～(2·11)式のように展開して係数間の関数を求めてみると、$\alpha_3=\alpha_4=\cdots\cdots=\alpha_8=0$となる。即ち、$f$は線形であり、これは仮定に矛盾する。

fが３変数以上の場合も同様。（証終）

〔補題2·7〕 u_α, u_εが１つずつと非線形関数があれば、少なくとも１つの非線形１変数関数を合成できる。

（証明）非線形関数をfとする。fが１変数関数とすると明らか。fが２変数関数であり、(2·1)式のように展開できたとする。u_α, u_ε各１とfから、補題2·3と2·4によってすべてのu_αとu_εを得る。これらから、(2·9)～(2·11)式のv_1, v_2, v_3及び、

$$v_{10}(x)=f(x,u_8(x)),\ v_{11}(x)=f(u_{16}(x),u_8(x)),$$
$$v_{12}(x)=f(x,u_{12}(x)) \quad \cdots\cdots (2\cdot 13)$$

を合成する。これらのすべてが、線形１変数関数であったと

すると、〔補題2・5〕の証明のようにして、fは線形である、という結果が出る。これは仮定に矛盾する。

fが3変数以上でも同様。（証終）

〔補題2・8〕（Martinの定理[3]）u_αと非線形1変数関数の各1があれば、これからu_ε以外のすべての1変数関数を合成できる。

（証明）原論文[3]参照。

〔補題2・9〕 u_ε以外のすべての1変数関数と非縮退2変数関数からすべてのu_εを得る。

（証明）u_εは表2-2のように示される。非縮退2変数関数をfとし、fからこのu_εを得るために、やはりu_εが必要であったとする。即ち、aを得るためには$f(b, c)$でなければならないとすると、$a \oplus 2$を得るためには、$f(b \oplus 2, d)$，$a \oplus 1$を得るためには$f(b \oplus 1, e)$でなければならない。たゞし、$a, b, c = 0, 1, 2$ 。

x	$u_\varepsilon(x)$
0	a
1	$a \oplus 2$
2	$a \oplus 1$

$x_1 \backslash x_2$	b	$b \oplus 1$	$b \oplus 2$
b	a	a	a
$b \oplus 1$	$a \oplus 2$	$a \oplus 2$	$a \oplus 2$
$b \oplus 2$	$a \oplus 1$	$a \oplus 1$	$a \oplus 1$

表2-2 $u_\varepsilon(x)$

この時、fの真理値表は表2-2の右側のようになる。これは即ち、1変数関数であり、仮定に反する。（証終）

以上の補助定理によって、次の定理を得る。

〔定理2・1〕　3値関数集合｛f｝が完全系をなすための必要十分条件は次の4つである。｛f｝から，（1）少なくとも1つの非縮退2変数関数が得られること，又，（2）巡回関数 u_α が得られること。更に，｛f｝の中に（3）非線形関数と（4）非自己巡回関数が，少なくとも1つずつ含まれること。

（証明）初めに必要であることを述べる。条件（1）はSlupecki の定理から，（2）はそのまゝで明らか。（3）及び（4）は，それぞれ補題2・1と2・2から明らか。

次に十分であることを述べる。この｛f｝が上記4条件を満足しているとする。（2）と（4）を満足することから，補題2・4と2・5によって，（イ）非線形1変数関数，（ロ）すべての u_ε，（ハ）すべての u_ζ，のどれかを得る。（イ）の場合は，補題2・8と2・9によって，（ロ）の場合は，補題2・7と2・8によって，さらに（ハ）の場合は，補題2・6，2・8，2・9によってすべての1変数関数が合成できる。よって，Slupeckiの定理により，この｛f｝は完全系をなす。（証終）

この定理はSlupecki の定理よりずっと検証し易い形をしている。Slupecki の定理では27個の1変数関数が合成できるかどうかを調べなければならない。しかも，その方法は述べていないので，この点の検証は非常に困難である。それにくらべ，この定理では唯一つの1変数関数 u_α を合成でき

るかどうか、が問題になるだけである。他の3つの条件の検証は容易である。

なお、この定理は2値論理関数に関する完全性の定理とよく似ている。即ち、伊吹・苗村・野崎[2]によれば、2値関数集合{f}が完全系をなすための必要十分条件は次の3つである。(1){f}から否定関数が合成でき、{f}の中に(2)非自己双対関数と(3)非線形関数が少なくとも1つずつ存在すること。

3値の場合、定理2·1の第1の条件が2値に較べ余計であるが、これは2値の場合は、非線形関数から必ず非縮退2変数関数を得ることができるからである。

3.　3値Polypheck

前節の定理2·1によって、完全性に関する研究は従来より数歩前進することになったが、本節ではこの成果をもとにしてPolypheckの条件を求めることにする。

まえがきで述べたように、Polypheckとはそれ自体で完全な関数である。従って、任意の論理回路をたゞ1つのPolypheckによって合成できる。これは今日のように集積回路技術が進んできた状況では、工学的に見て非常に重要であると思われる。

定義によって、Polypheckはそれだけで定理2·1の4条件をすべて満足している。そのうち、(1),(3),(4)の3条件を同時に満足する関数を見出すのは極めて容易である。しかし、(2)の条件を満足するものを見出すのはそう簡単なことではなく、本節のPolypheckに関する必要十分条件でも、この点の論議が中心となる。

3·1 巡回可能関数

［定義3·1］関数fのみからu_αが合成できるとき、fは巡回可能である、と言う。

これは2値の「可補的(complementary)」という概念に対応する。ある関数が巡回可能であるなら、定理2·1によってこの関数がPolypheckであるかどうかは容易に判断できる。

［定義3·2］真理値集合Lを2つの真部分集合に分割する。その方法は3通りあって、次のようにD_0, D_1, D_2で示す。D_0; $0\|1,2$, D_1; $1\|2,0$, D_2; $2\|0,1$。そして、たとえば、「真理値1と2はD_0に関して右側にある」というように呼ぶ。

［定義3·3］真理値aとbが分割D_jに関して同じ側にある時、$a \sim b$ (D_j)と書く。$a_i \sim b_i$ (D_j)なるすべてのa_i, b_iに関して、

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \sim f(b_1, b_2, \cdots, b_n) \ (D_j)$$

が成立する時、「f は D_j に関して分割可能である」という。

表3-1に、D_0に関して分割可能な関数2例をあげる。

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2
0	1	0	0
1	2	1	1
2	1	1	2

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2
0	2	1	1
1	2	0	0
2	1	0	0

表3-1

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2
0	0	2	0
1	1	1	1
2	2	1	2

表3-2

［補題3-1］あるD_jに関して分割可能な関数からは、同じD_jに関して分割可能な関数しか合成できない。

（証明）$a_i \sim b_i\ (D_j)$ なる a_i, b_i と、D_j に関して分割可能な関数fと$f_k\ (k=1,2,\cdots,n)$を考える。このとき、

$$f\{f_1(a_1,a_2,\cdots,a_n), f_2(a_1,a_2,\cdots,a_n),\cdots, f_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)\}$$
$$\sim f\{f_1(b_1,b_2,\cdots,b_n), f_2(b_1,b_2,\cdots,b_n),\cdots, f_n(b_1,b_2,\cdots,b_n)\}\ (D_j)$$

即ち、f と f_kによって合成される関数はすべてD_j に関して分割可能である。（証終）

［定義3・4］あるD_jの右（左）側の真理値集合を定義域とした時、関数fの値域が再び D_j の右（左）側真理値集合に含まれる時、「fは D_j に関して右（左）に閉じている」という。

表3-2に示される関数は D_0 に関して、右にも左にも閉じている。

［補題3・2］ある D_j に関して右（左）に閉じている関数から合成される関数はやはり、D_j に関して右（左）に閉じている。

（証明）　殆ど明らかである。

［補題3・3］すべての D_i に関して、どちらの側にも閉じていない関数を f とすると、$f(x,x,\cdots,x)=u_\alpha(x)$ 又は、$f(x,x,\cdots,x)=u_\beta(x)$ である。

（証明）f はどの D_i に関しても、　　左に　閉じていない。即ち、x がいかなる値をとっても、$f(x,x,\cdots,x)\neq x$ である。表2-1を参照すると、$f(x,x,\cdots,x)$ は $u_\alpha(x)$ か、$u_\beta(x)$ に等しい。　（証終）

以上の補題から、次の定理を得る。

［定理3・1］　関数 f が巡回可能であるための必要十分条件は次の2つである。f はすべての D_i に関して (1) どちらの側にも閉じていず、(2) 分割不可能であること。

（証明）必要であることは、補題3・1と3・2から明らかである。

いま、f が上の2条件を満足しているとする。(1) の条件と、補題3・3から、$f(x,x,\cdots,x)$ は $u_\alpha(x)$ か、$u_\beta(x)$ に等しい。$u_\alpha(x)$ に等しいとすると、定義から明らかに f は巡回可能である。$u_\beta(x)$ に等しいとする。この場合の証明は、いくぶん混み入っており、紙数の都合で省略する。文献 (4) を参照されたい。

3・2　3値Polypheckの必要十分条件

巡回可能関数の必要十分条件が分かったために、3値Polypheckの必要十分条件はかんたんに求められる。まず補題を2つ述べる。

〔補題3・4〕　巡回可能，線形かつ、非自己巡回的な関数は存在しない。

（証明）いま、関数fが巡回可能であったとす。補題3・3によって、$f(x, x, \cdots, x)$は$u_\beta(x)$か$u_\alpha(x)$に等しい。

$f(x, x, \cdots, x) = u_\beta(x)$とする。$u_\beta$は表2-1に見る通り、非線形関数である。補題2・1によると、非線形関数は非線形関数からしか合成できない。したがってfは非線形関数である。即ち、この場合，巡回可能なら非線形である。

$f(x, x, \cdots, x) = u_\alpha(x)$とする。いま、$u_\alpha = u_{16}$とする。$f$が線形とすると、(2・3)式のように書ける。従って、

$$f(x, x, \cdots, x) = \alpha_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x = u_{16}(x) = 1 \oplus x$$

$$\therefore \alpha_0 = 1 \text{　かつ　} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} = 1$$

この関係を用いて、

$$f(u_{16}(x_1), u_{16}(x_2), \cdots, u_{16}(x_n)) = \alpha_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}(1 \oplus x)$$
$$= 1 \oplus (\alpha_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x_i) = u_{16}\{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

即ち、fは自己巡回的である。けっきょく、この場合、fが

巡回可能なら自己巡回的となる。$u_\alpha=u_{20}$の時も同様。(証終)

〔補題3・5〕　非自己巡回的なn(≧2)変数関数からは、非縮退2変数関数を得る。

(証明)文献(4)参照。

以上の2つの補助定理と定理2・1から、次の重要な定理を得る。これが本節の中心である。

〔定理3・2〕　関数fがPolypheckであるための必要十分条件は次の2つである。(1)fは巡回可能であること。(2)fは非自己巡回的であること。

(証明)必要であることは、定義3・1と補題2・2から明らかである。

十分であることを証明する。いま、fがこの2条件を満足しているとする。表2−1を見れば分かるように、fが1変数関数ならfは2条件を同時に満足し得ない。よって、fはn(≧2)変数関数である。したがって、補題3・5からfは定理2・1の条件(1)を満足する。次に、上の(1)の条件により、fは定理2・1の条件(2)を満足する。又、補題3・4により、fは定理2・1の条件(3)を満足する。最後に、上の(2)の条件により、fは定理2・1の(4)を満足する。以上のように、fは定理2・1の4条件を満足する。従って、fはPolypheckである。(証明終)

この定理から、Polypheckの数を求めることができる。結果のみを示すと、n変数 Polypheck の数 $_nP$ は、

$$ {}_nP = 2\left\{4\cdot 3^{3^n-3} - 3^{3^{n-1}-3} - 3^{3^n-2^n}\cdot 2^{2^n-2} - 3\prod_{j=1}^{n-1}(1+2^j)^{\binom{n}{j}} + 3\prod_{j=1}^{n-1}(1+2^{2^j-1})^{\binom{n}{j}}\right\} $$

である。$n=2$ では 3774 であり、Martin[3] の結果と一致する。$n=3$ ではその数は２~~千億~~兆を越える。

このように膨大な数はあっても、工学的な応用を考えた時に重要なものは次の４つに限られよう。

$$ NAND1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1 \oplus \min(x_1, x_2, \cdots, x_n) $$

$$ NAND2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2 \oplus \min(x_1, x_2, \cdots, x_n) $$

$$ NOR1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1 \oplus \max(x_1, x_2, \cdots, x_n) $$

$$ NOR2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2 \oplus \max(x_1, x_2, \cdots, x_n) $$

さらに、この４つの関数を回路的に実現する方法も考えられるが、こゝでは触れない。

4. AND, OR と完全性

大形機器のための論理回路を構成しようとする場合、その基本回路としてはどのようなものを選ぶのが良いだろうか。性能がよくて実現し易い回路をできるだけ少数選ぶのが理想である。（もちろん、この基本回路系は完全系をなさねばな

らない。）ところが3値論理回路の現状ではこのような点で満足できる基本回路系は存在しない。そこで、どちらかに重点を置いて基本回路を選ぶことにする。できるだけ少数の基本回路という点に重点を置くなら、Polypheck に優るものはない。しかし、性能が良くて入手し易い回路という点に重点を置くと、以下本節で述べる基本回路系が注目される。

AND, ORを次のように定義する。

$$AND(x_1, x_2, \cdots, x_n) = min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$OR(x_1, x_2, \cdots, x_n) = max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

この両者は2値の場合と同様にして回路的実現が可能であり、しかも、べき等律、交換律，結合律，吸収律，分配律等を満足するので数学的取扱いも非常に便利である。

定理2-1を振り返ってみると、AND, ORはこの定理の4条件のうち、(1), (3), (4) の3つは満足するが (2)の条件は満足していない。そこで、完全系にするために、(2)を満足できるような関数を選ぶ必要がある。取扱い易さから言って、その関数は1変数関数であることが望ましい。(2)を満足する1変数関数とは u_α そのものであるが、これは回路実現が比較的困難である。そこで、別の1変数関数と AND, OR によって完全系をなすようにできないか、という問題が生じてくる。以下、本節ではこの問題について述べていく。

4·1 関数の定義とその性質

〔定義4·1〕真理値 0, 1, 2 に対しある大小関係を定める。そして、たとえば、0が1より大であると定義した時、$0>1$ というようにあらわす。ある大小関係を定義した時、すべての $a_i \geq b_i$ なる変数に対して、

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

となるような関数 f があったとする。この f を単調増大関数と呼び、そうでない関数を非単調増大関数と呼ぶ。

$0 \leq 1 \leq 2$ という大小関係に対し、定義2·1に述べた6種の置換を行うことによって次の6つの大小関係を得る。

1. $0 \leq 1 \leq 2$　2. $1 \leq 0 \leq 2$　3. $0 \leq 2 \leq 1$

4. $2 \leq 1 \leq 0$　5. $1 \leq 2 \leq 0$　6. $2 \leq 0 \leq 1$

表2-1の u_ζ と u_η，即ち u_1, u_4, u_{27}, x の4つは上のいかなる大小関係に対しても単調増大である。逆に、$u_\alpha, u_\beta, u_\varepsilon$ に属する11個の1変数関数はいかなる大小関係に対しても非単調増大である。その他の12個の1変数関数はすべて、ある大小関係に対しては単調増大であり、他のある大小関係に対しては非単調増大である。

〔補題4·1〕ある大小関係に対して単調増大な関数から合成される関数は、やはりその大小関係に対して単調増大である。

（証明）ある大小関係に対し、n 変数関数 f と f_i ($i=1,2,\cdots,n$) が単調増大であったとする。$g=f(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ なる関数 g を合成する。すべての $a_i \geq b_i$ なる変数 a_i, b_i に対して、

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \geq f(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$f_i(a_1,a_2,\cdots,a_n) \geq f(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

が成立しているから、明らかに、

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n) \geq g(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

である。即ち、g は単調増大である。（証終）

［補題4・2］関数 AND は定義4・1の 1. と 3. の関係に対して単調増大であるが、他の関係に対しては非単調増大である。一方、OR は 1. と 2. の関係に対して単調増大であるが、他の関係に対しては非単調増大である。

（証略）

［補題4・3］AND, OR から合成される関数はすべて、1. の関係に関して単調増大である。

（証明）補題4・2 と 4・1 から明らか。（証終）

［補題4・4］AND, OR は共に、D_0, D_2 に関して分割可能であるが、D_1 に関しては分割不可能である。

（証明）AND, OR と分割可能性の定義から明らか。（証終）

［補題4・5］D_0 に関して分割不可能な1変数関数は、u_2

u_3, u_4, u_7, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{16}, u_{20}, u_{21}, u_{25} の12個である。一方、D_2 に関して分割不可能な1変数関数は u_7, u_8, u_9, および $u_{16}\sim u_{24}$ の12個である。

（証明）分割不可能性の定義と表2-1から明らか。（証終）

〔補題4・6〕AND, OR はすべての分割 D_i に関し、どちらの側にも閉じている。

証明は明らかである。

〔定義4・2〕分割 D_2 の右側集合，即ち（0, 2）を定義域とした時、その値域が D_1 の右側集合，即ち（0, 1）になるような1変数関数を u_P であらわす。u_P は表4-1に示す4つの u_{P_i} に分けることができる。＊は任意を示す。具体的には u_P は表4-1の右欄に示す10個の関数である。

x	u_{P_1}	u_{P_2}	u_{P_3}	u_{P_4}	u_{16}	u_{20}	u_{21}	u_7	u_{19}	u_8	u_{25}	u_{12}	u_3	u_9
0	0	2	*	*	1	2	2	0	2	0	2	1	0	0
1	2	0	0	2	2	0	0	2	0	2	2	0	0	2
2	*	*	2	0	0	1	2	0	0	1	0	2	2	2

表4-1　$u_P(x)$

〔補題4・7〕u_P 以外の1変数関数と AND, OR からは u_P を合成することはできない。

（証明）文献(5)を参照。

4·1 AND, OR と1変数関数による完全系の条件

以上の補助定理を用いて次の定理を得る。

［定理4·1］AND, OR と1変数関数の集合 $\{v_i\}$ が完全系をなすための必要十分条件は次の4つである。$\{v_i\}$ の中に、(1) 任意の分割 D_i に関して任意の側に閉じていない v_i が存在し、(2) D_0 に関して分割不可能な v_i と D_2 に関して分割不可能な v_i が存在し、かつ、(3) 少なくとも1つの v_p が含まれ、(4) 大小関係 $0<1<2$ に関して非単調増大な v_i が含まれること。

（証明）まず、必要であることを述べる。条件(1)は補題4·6と3·2によって明らかである。条件(2)は補題4·6と3·2によって明らか。さらに、条件(3)は補題4·7によって、条件(4)は補題4·1と4·3によってあきらかである。

十分であることの証明はかなり混み入っているので、詳細は文献(5)を参照。大略を述べると、先ず、(3)の条件を満足することから、表4-1の右欄10個の v_i のどれかが存在すると仮定する。そして、その各々の場合について、(1), (2), (4) の条件を加えて考え、v_α のどちらかを合成するのである。（証終）

この定理によって、1変数関数として何を選べばそれが AND, OR と共に完全系をなすか、という問題が解かれた。

しかし、実際にこの結果を利用するには、この形のまゝではやゝ不便である。そこで、これを分かり易い形で表にしてみる。

定理4・1の条件(1)は言い方を変えれば、いかなるTに対しても $u_i(T) \neq T$ なる u_i の存在が必要であることを言っている。しかし、実際にはすべてのTを考えなくても以下に述べる $C_1 \sim C_4$ の4つの条件を満足する u_i が存在すれば条件(1)が満足されることが確認される。即ち、

C_1; $u_i(0) \neq 0$　　　C_2; $u_i(1) \neq 1$

C_3; $u_i(2) \neq 2$　　　C_4; $u_i(0)=1$ 又は $u_i(2)=1$

である。さらに、条件(2)を2つに分けて C_5 と C_6 で表わす。

C_5; D_2に関して分割可能

C_6; D_0に関して分割可能

さらに、条件(3), (4)をそのまゝ C_7, C_8 であらわす。

C_7; u_P である。

C_8; 非単調増大関数である

すると、u_i が上の8条件を満足するかどうかを表4−2のように示すことができる。1印があるのは、u_i がそれに該当する C_j なる条件を満足する、という意味である。

従って、表4−2のすべての C_j を満足するように $\{u_i\}$ を選べば、その系はAND, ORと共に完全系をなす。これを

$u_i(x)$	x 0 1 2	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
u_1	0 0 0		1	1					
u_2	0 0 1		1	1	1		1		
u_3	0 0 2		1				1	1	
u_4	0 1 0			1			1		1
u_5	0 1 1			1	1				
u_6	0 1 2								
u_7	0 2 0		1	1		1	1	1	1
u_8	0 2 1		1	1	1	1		1	1
u_9	0 2 2		1			1		1	
u_{10}	1 0 0	1	1	1	1				1
u_{11}	1 0 1	1	1	1	1		1		1
u_{12}	1 0 2	1	1		1		1	1	1
u_{13}	1 1 0	1		1	1		1		1
u_{14}	1 1 1	1		1	1				
u_{15}	1 1 2	1			1				
u_{16}	1 2 0	1	1	1	1	1	1	1	1
u_{17}	1 2 1	1	1	1	1	1			1
u_{18}	1 2 2	1	1		1	1			
u_{19}	2 0 0	1	1	1		1		1	1
u_{20}	2 0 1	1	1	1	1	1	1	1	1
u_{21}	2 0 2	1	1			1	1	1	1
u_{22}	2 1 0	1		1		1	1		1
u_{23}	2 1 1	1		1	1	1			1
u_{24}	2 1 2	1				1			1
u_{25}	2 2 0	1	1	1			1	1	1
u_{26}	2 2 1	1	1	1	1				1
u_{27}	2 2 2	1	1						

表4-2　$C_1 \sim C_8$

いくつかの例で示す。

（例1）u_{16} 及び u_{20} は表4−2 に示す通り、それ1つですべての C_j を満足する。従って、これらはそれだけで完全系をなす。

（例2）$\{u_{22}, u_{25}, u_{26}\}$ という $\{u_i\}$ を選ぶと、これらは表から明らかなとうり、すべての C_j を満足する。即ち、完全系をなす。これは Vacca[6] の選んだ系である。

（例3）3値論理関数は J_0（u_{19} と同じ），J_1（u_7 と同じ），J_2（u_3 と同じ）という J 関数と、AND, OR 及び定数を用いて展開される。即ち、$\{J_0, J_1, J_2, 0, 1, 2\}$ が AND, OR と共に完全系をなす。このことは表によって容易に確かめられる。更に、定数としては 1 だけでよく、しかも、J_i はすべてが必要でないことが分かる。即ち、$\{J_1, 1\}$ 及び、$\{J_0, J_2, 1\}$ なる $\{u_i\}$ を選んでも完全系をなすことが分かる。

（例4）u_{22} なる関数は、従来から非同期式論理や Fail-Safe 論理などで注目されている関数である。しかし、AND，OR とこの u_{22} だけでは完全系をなさないことは表4−2から明らかである。他に u_{25} と u_{26} を選べば、例2の Vacca と同じになるし、定数1（$=u_{14}$）と u_{19}，又は 1 と u_{25} を選んでも完全系をなすことが分かる。

（例5）さらに、この表を利用すれば、回路的に実現が容

易なものばかりで、AND, ORと共に完全系をなすことが分かる。即ち、u_{10}, u_{13}, u_{19}, u_{23}, u_{25}, u_{26} の6つは、2値のトランジスタインバータと同じ形の回路で実現される。更に、定数0, 1, 2は電源から直接に得られる。この9この1変数関数は表4-2のすべてのCを満足する。

また、この表から、上の9個の u_i のすべてがなくても完全系をなすようにできることが分かる。そのような $\{u_i\}$ のうち、1つの u_i でも除くと不完全な系となるようなものを仮に極小完全系と呼ぶことにする。上記9個の u_i がなす極小完全系は表から直ちに次の5つであることが分かる。

(u_{13}, u_{19}), (u_{23}, u_{25}), (u_{10}, u_{19}, u_{25})

(u_{14}, u_{19}, u_{25}), (u_{19}, u_{25}, u_{26})

これらが工学的に重要であることは充分に考えられる。

5. あとがき

以上、3値完全系についての研究結果を述べた。残された問題は多いが、特に定理2・1をより検易し易いものにすることが最大の問題であろう。その解決には、3. 4. で述べた各補題、定理が重要な鍵になると思われる。

最後に、この研究が基礎の一つとなって、3値論理の研究がより進んで行くことを望んでやまない。

参考文献

(1) J. Slupecki: 'A Criterion of Fullness of Many-Valued Systems of Propositional Logic' Comptes Rendus Class III Vol.32 (1939) pp.102

(2) 伊吹・苗村・野崎: '万能論理関数系の一般論' 信学誌 Vol.46−7 pp.42

(3) N.M. Martin: 'The Sheffer Functions of 3-Valued Logic' The Journal of Symbolic Logic, Vol.19 pp.45

(4) 田中・田原; '三値 Polypheck' 信学会電子計算機研究会資料 44年4月

(5) 田中・田原: '三値論理関数の完全性に関する一研究' 44年2月

(6) R. Vacca: 'A Three Valued System of Logic and Its Application to Base Three Digital Circuits' UNESCO/NS/ICIP/G.2.14.

なお、一般論に関しては本研究集会に下記の資料が発表された。筆者にとって非常に参考になった。

(7) 野崎 昭弘: '多値論理とオートマトン' 多値論理研究集会資料 (1970 京大数研)